Математичка гимназија

МАТУРСКИ РАД
- из математике -

Ремзијева теорема

Ученик:
Иван Гогић 4е

Ментори:
Предраг Тановић
Бориша Кузељевић

Београд, јун 2020.

Садржај

Увод

Теорија скупова је грана математике која проучава скупове, који су колекције објеката и помоћу ње заснивамо све математичке објекте. Комбинаторна теорија скупова проширује комбинаторику коначних скупова на бесконачне скупове. Ремзијева теорема је једна од основних теорема комбинаторике теорије скупова. Она нам говори да ако сваки r-елементни подскуп бесконачног скупа обојимо у $s \in \mathbb{N}$ боја, постојаће бесконачан подскуп чији ће сваки r-елементни подскуп бити обојен истом бојом. Познати проблем "Доказати да међу 6 људи постоји или 3 особе које се познају или постоје 3 особе које се међусобно не познају" је само специјални случај коначне Ремзијеве теореме, која је најважнији резултат о партицијама коначних скупова. Поред Ремзијеве теореме која нам говори о скуповима кардиналности $\aleph_0$ (кардиналност скупа природних бројева), природно је занимати се и резултатима који важе за непребројиве скупове (скупови кардиналности веће од $\aleph_0$).

У првом делу рада дефинисаћемо шта су ординали и кардинали, јер ће нам они бити потребни у даљем раду.

У другом делу рада позабавићемо се израчунавањем неких Ремзијевих бројева и Ремзијевом теоремом.

У трећем делу рада видећемо неке теореме сличне Ремзијевој теореми само што су скупови кардиналности веће од $\aleph_0$.

1 Ординали и кардинали

Ординали

Природне бројеве упознајемо још кад кренемо да радимо математику у основној школи; после смо се у средњој школи дотакли Пеанових аксиома и упознали се са принципом математичке индукције. У теорији скупова, скуп природних бројева дефинишемо на следећи начин:
$\mathbb{N} = \{x \mid x \in I$ за сваки индуктиван скуп $I\}$,
где је индуктиван скуп скуп I који садржи $0 = \emptyset$ као елемент и има својство да уколико $n \in I$ тада и $n + 1 \in I$ (са $n + 1 = S(n) = n \cup \{n\}$ означен је скуп наследник од n). Аксиома бесконачности нам гарантује постојање индуктивног скупа, па скуп $\mathbb{N}$ можемо формално дефинисати применом шеме аксиоме издвајања на било који индуктиван скуп X:
$\mathbb{N} = \{x \in X \mid x \in I$ за сваки индуктиван скуп $I\}$.
Поставља се питање можемо ли наставити бројање након природних бројева; видећемо да можемо, и упознати се са ординалним (редним) бројевима.

Дефиниција 1.1 *Скуп W је добро уређен релацијом $<$ ако*
(а) $(W, <)$ је линеарно уређен скуп,
(б) Сваки непразан подскуп од W има најмањи елемент.

Дефиниција 1.2 *Скуп T је транзитиван ако је сваки елемент из T такође и подскуп од T.*

Дефиниција 1.3 *Скуп α је ординал ако*
(а) α је транзитиван скуп,
(б) α је добро уређен са $\in$.

Лако можемо видети да су сви природни бројеви ординали, а такође и сам скуп природних бројева је ординал. Означимо са $\omega = \mathbb{N}$

Лема 1.4 *Ако је α ординал, онда је и $S(\alpha)$ такође ординал.*

Доказ. $S(\alpha)$ је транзитиван- уколико $X \in S(\alpha)$, тада је или $X = \alpha$ и тада важи да је X уједно и подскуп од $S(\alpha)$, а уколико $X \in \alpha$ тада на основу тога што је α ординал имамо да је $X \subseteq \alpha$, а како је $\alpha \subseteq S(\alpha)$ имамо и $X \subseteq S(\alpha)$. Тривијално показујемо и да је $S(\alpha)$ добро уређен, одакле следи да је он ординал. $\square$
Дефинишимо наследника од α са $\alpha + 1 = S(\alpha)$.

Лема 1.5 *Сваки елемент ординала α је ординал.*

Доказ. Нека је α ординал. Требамо да докажемо да је за сваки $x \in \alpha$, x транзитиван и добро уређен са $\in$. Уколико је $u \in v \in x$, како је α ординал следи да је $v \in \alpha$, а одатле да је $u \in \alpha$. Како $\in$ добро уређење, оно линеарно уређује α, те следи $u \in x$ одакле је x транзитиван. За $x \in \alpha$ имамо да је $x \subseteq \alpha$ (α је ординал), па $\in$ добро уређује x као рестрикција доброг уређења $(\alpha, <)$. $\square$

Лема 1.6 *Ако за ординале α, β важи $\alpha \subset \beta$, тада је $\alpha \in \beta$.*

Доказ. Нека су α, β ординали, $\alpha \subset \beta$; скуп $\beta - \alpha$ је непразан, нека је γ његов најмањи елемент у уређењу $\in$. Тада важи $\gamma \subseteq \alpha$, јер да је $\alpha \subset \gamma$ сваки елемент непразног скупа $\gamma - \alpha$ у уређењу $\in$ био мањи од γ који припада $\beta - \alpha$, што је контрадикција. Сада остаје да покажемо да је $\alpha \subseteq \gamma$, одакле следи $\alpha = \gamma \in \beta$, што би био крај доказа. Нека је $\delta \in \alpha$; уколико не важи $\delta \in \gamma$, тада је или $\gamma \in \delta$ или $\gamma = \delta$ (зато што $\gamma, \delta \in \beta$ а $\in$ добро уређује β), одакле следи да је $\gamma \in \alpha$ што је контрадикција са избором γ као елемента $\beta - \alpha$. $\square$

Уколико за неки ординал α постоји ординал β тако да је $\alpha = \beta + 1$ кажемо да је α ординал наследник; иначе је гранични ординал. За све ординале α, β дефинишемо $\alpha < \beta$ акко $\alpha \in \beta$, чиме проширујемо операцију поређења природних бројева.

Лема 1.7 *Нека су α, β ординали. Тада важи тачно једно од $\alpha < \beta$, $\alpha > \beta$ и $\alpha = \beta$.*

Доказ. Нека су α, β ординали; тада је $\alpha \cap \beta$ такође ординал, и важи $\alpha \cap \beta \subseteq \alpha$, $\alpha \cap \beta \subseteq \beta$. Ако је $\alpha \cap \beta = \alpha$ тада је $\alpha \subseteq \beta$, те је или $\alpha \subset \beta$ или $\alpha = \beta$ на основу леме 1.6; слично важи и када је $\alpha \cap \beta = \beta$. Уколико је $\alpha \cap \beta \subset \alpha$, $\alpha \cap \beta \subset \beta$, тада је $\alpha \cap \beta \subset \alpha \cap \beta$, што је контрадикција јер ни за један ординал λ не може да важи $\lambda \in \lambda$. $\square$

Лема 1.8 *Сваки непразан скуп ординала има најмањи елемент у уређењу $<$.*

Доказ. Нека је A непразан скуп ординала; узмимо неки његов произвољан елемент α. Уколико је $\alpha \cap A = \emptyset$, тада је α најмањи скуп у том уређењу, а ако је $\alpha \cap A \neq \emptyset$ тада ће $\alpha \cap A \subseteq \alpha$ имати најмањи елемент у уређењу $\in$, и он ће бити најмањи елемент A у уређењу $<$. $\square$

Последица претходне две леме је да сваки непразан скуп ординала добро уређен са $<$.

Интуитивно би било да дефинишемо $\omega + \omega$ као унију ω и свих ординала облика $\omega + n$, за све $n \in \mathbb{N}$; међутим, из ствари дефинисаних до сада не можемо гарантовати постојање таквог скупа. За то ће нам требати нова аксиома.

Шема аксиома замене Нека је $P(x, y)$ својство тако да за свако x постоји јединствено y за које $P(x, y)$ важи. Тада за сваки скуп A постоји скуп B такав да за свако $x \in A$ постоји $y \in B$ за које $P(x, y)$ важи.

Можемо доказати да важи принцип индукције и за ординале, само у мало модификованој форми због граничних ординала.

Принцип трансфинитне индукције Нека је $P(X)$ неко својство. Претпоставимо, да за све ординале α важи: Ако $P(\beta)$ важи за све $\beta < \alpha$, тада важи $P(\alpha)$. Тада $P(\alpha)$ важи за све ординале α.

Дефиниција 1.9 *Изоморфизам између два уређена скупа $(P, <_1)$ и $(Q, <_2)$ је бијекција $h : P \to Q$, где за све $p_1, p_2 \in P$ важи $p_1 <_1 p_2$ акко $h(p_1) <_2 h(p_2)$. Тада кажемо да су $(P, <_1)$ и $(Q, <_2)$ изоморфни.*

Следећу теорему наводимо без доказа.

Теорема 1.10 *Сваки добро уређен скуп (W, R) изоморфан је са јединственим ординалом $(\alpha, \in)$.*

Дакле, дефинисали смо индукцију на ординалима и можемо да дефинишемо низове ординала.

Кардинали

Кардиналност неког скупа можемо гледати као број елемената у том скупу; кардиналност коначног скупа ће бити природан број тако да између тог скупа и природног броја постоји бијекција; сад треба проширити појам на бесконачне скупове.

Дефиниција 1.11 *Скупови A и B су еквипотентни ако постоји бијекција између њих. Тада пишемо $|A| = |B|$.*

Приметимо да уколико су $(P, <_1)$ и $(Q, <_2)$ изоморфни, тада је $|P| = |Q|$.

Дефиниција 1.12 *Скуп A је коначан ако је еквипотентан неком природном броју $n \in \mathbb{N}$, и тада кажемо да је $|A| = n$. У супротном, скуп је бесконачан.*

Дефиниција 1.13 *Бесконачан скуп A је пребројив ако је $|A| = |\mathbb{N}|$. У супротном, скуп је непребројив.*

Дефиниција 1.14 *Ординал α је почетни ординал ако није еквипотентан ни са једним $\beta < \alpha$.*

Теорема 1.15 *Сваки добро уређен скуп X је еквипотентан са јединственим почетним ординалом.*

Доказ. На основу теореме 1.10, имамо да је X изоморфан са неким јединственим ординалом α. Нека је α_0 најмањи ординал еквипотентан са X; уколико α_0 није почетни ординал, онда бисмо имали да је он еквипотентан са неким $\beta < \alpha$, те би онда и X био еквипотентан са β, што је контрадикција. Уколико су $\alpha_0 \neq \alpha_1$ два почетна ординала, они не могу бити еквипотентни (следи из дефиниције почетног ординала), те добијамо да је α_0 јединствен почетни ординал са којим је X еквипотентан. $\square$

Дефиниција 1.16 *Кардинални број неког добро уређеног скупа X, означен са $|X|$, је јединствен почетни ординал еквипотентан са X.*

У сагласности са стварима до сада, важиће да је $|X| = n$ за било који скуп од n елемената, као и да је $|X| = \omega$ за сваки пребројив скуп. Сада ћемо видети како можемо правити произвољно велике почетне сегменте.

Теорема 1.17 ***Кантор*** *За сваки скуп X важи $|X| < |\mathcal{P}(X)|$.*

Доказ. Лако видимо да важи $|\mathcal{P}(X)| \geq |X|$, јер имамо 1-1 функцију $f : X \to \mathcal{P}(X)$ задату са $f(x) = \{x\}$. Треба још показати да не постоји "на" функција из X у $\mathcal{P}(X)$. Нека је $f : X \to \mathcal{P}(X)$ произвољна функција; посматрајмо скуп $S = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$. Докажимо да $S \notin dom(f)$. ППС, тј. да је $S = f(x)$ за неко $x \in X$; из дефиниције скупа S имамо да $x \in S$ акко $x \notin f(x)$, те имамо $x \in S$ акко $x \notin S$, што је контрадикција. $\square$
Дакле, не постоји скуп чија је кардиналност максимална.

Дефиниција 1.18 *За било који скуп A, нека је $h(A)$ најмањи ординал који није еквипотентам ни са једним подскупом од A.*
$h(A)$ називамо Хартогсов број скупа A.

Из дефиниције видимо да је $h(A)$ најмањи ординал α тако да $|\alpha| \nleq |A|$.

Лема 1.19 *За сваки скуп A, $h(A)$ је почетни ординал.*

Доказ. Претпоставимо супротно, тј. да за неко $\beta < h(A)$ важи $|\beta| = |h(A)|$; тада би постојао неки подскуп од А који је еквипотентан са β, те би и $h(A)$ био еквипотентан том подскупу, што је контрадикција. $\square$

Лема 1.20 *Хартогсов број скупа A постоји за сваки скуп A.*

Доказ. На основу теореме 1.10 имамо да је сваки добро уређен скуп (W, R), $W \subseteq A$ изоморфан са јединственим ординалом α. Шема аксиома замене нам гарантује постојање скупа H тако да за свако добро уређење $R \in \mathcal{P}(A \times A)$, ординал изоморфан са њим налази у H; докажимо да H садржи све ординале еквипотентне са неким подскупом из A. Нека је f 1-1 пресликавање из неког ординала α у A; узећемо да је $W = ran(f)$ и $R = \{(f(\beta), f(\gamma)) \mid \beta < \gamma < \alpha\}$; $R \subseteq A \times A$ је тада добро уређење изоморфно са α изоморфизмом f. Из постојања скупа H следи постојање скупа $h(A) = \{\alpha \in H| \ \alpha \text{ је ординал}, |\alpha| = |B|, \ B \subseteq A\}$ на основу шеме аксиоме издвајања. Скуп $h(A)$ јесте ординал: сви елементи су му ординали па је добро уређен са $<$, те остаје да покажемо да је $h(A)$ транзитиван; за свако $\beta \in \alpha \in h(A)$ важи да је β ординал (јер је α ординал) и $\beta \subseteq \alpha$, и уколико је $f : \alpha \to B \subseteq A$ изоморфизам можемо само узети рестрикцију f на β као изоморфизам између β и неког подскупа $C \subseteq B$, одакле следи да $\beta \in h(A)$. Сада треба показати да $h(A)$ није еквипотентан ни са једним подскупом скупа A и да је минималан такав скуп. Прво ПП да је $h(A)$ еквипотентан неком подскупу скупа A; тада бисмо из дефниције скупа $h(A)$ имали $h(A) \in h(A)$, што је контрадикција јер је $h(A)$ ординал. Сада ПП да је $\alpha \neq h(A)$ најмањи ординал који није еквипотентан ниједном подскупу скупа A; како $<$ добро уређује скуп ординала, важиће $\alpha < h(A)$, одакле следи $\alpha \in h(A)$, па из дефиниције скупа $h(A)$ следи да је α еквипотентан неком подскупу скупа A, што је контрадикција. Из свега овога следи да $h(A)$ јесте Хартогсов број скупа A. $\square$

Дефиниција 1.21
$\omega_0 = \omega$;
$\omega_{\alpha+1} = h(\omega_\alpha)$ *за сваки ординал* α;
$\omega_\alpha = \sup\{\omega_\beta \mid \beta < \alpha\}$ *ако је* α *гранични ординал,* $\alpha \neq 0$.

Следећу теорему наводимо без доказа.

Теорема 1.22
(а) ω_α *је бесконачан почетни ординал за сваки ординал* α.
(б) Ако је Ω *бесконачан почетни ординал, тада је* $\Omega = \omega_\alpha$ *за неки* α.

Дакле, закључили смо да је сваки добро уређен скуп еквипотентан са јединственим почетним ординалом и да бесконачни почетни ординали формирају низ ординала ω_α где је α било који ординал. Бесконачни почетни ординали су по дефиницији кардиналности бесконачних добро уређених скупова; зовемо их алефи и означавамо их са $\aleph_\alpha = \omega_\alpha$ за сваки α.
Дефинисаћемо још неколико ствари.

Дефиниција 1.23 *Скуп* A^B *представља скуп свих пресликавања из скупа* B *у скуп* A.

Дефиниција 1.24 *Дефинишемо* $\kappa^\lambda = |A^B|$, *где је* $|A| = \kappa$ *и* $|B| = \lambda$, *за произвољне кардинале* κ *и* λ.

Теорема 1.25 *Партитативни скуп скупа* $\mathbb{N}$ *је непребројив.*

Доказ. Следи из Кантрове теореме. $\square$

Теорема 1.26 $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |2^\mathbb{N}| = |\mathbb{R}|$.

Доказ. За сваки подскуп $S \subseteq \mathbb{N}$ дефинишимо пресликавање $f_S : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ на следећи начин:

$$f_S(n) = \begin{cases} 0, & n \in S; \\ 1, & n \notin S. \end{cases} \tag{1}$$

Сада је очигледно да је $F : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to 2^\mathbb{N}$ задата са $F(S) = f_S$ за сваки $S \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ бијекција; остаје да покажемо да је $|\mathbb{R}| = |2^\mathbb{N}|$.
1) Докажимо прво да је $|2^\mathbb{N}| \leq |\mathbb{R}|$. За то ћемо само узети пресликавање које ће сваком елементу $|2^\mathbb{N}|$ придружити јединствен реалан број обика $0.a_0a_1...$, где је $\langle a_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ тај елемент из $|2^\mathbb{N}|$.
2) Остаје још да покажемо да је $|2^\mathbb{N}| \geq |\mathbb{R}|$. Реалне бројеве конструисали смо као резове рационалних бројева; узећемо онда 1-1 функцију која ће сваком реалном броју $r = (A, B)$ доделити подскуп $A \subseteq \mathbb{Q}$, одакле имамо да је $|\mathbb{R}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{Q})| = |2^\mathbb{Q}| = |2^\mathbb{N}|$. $\square$

Закључили смо да је $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$. Један од најпознатијих проблема теорије скупова била је хипотеза континума, која поставља питање да ли је $2^{\aleph_0} = \aleph_1$; испоставило се да је она независна од ZFC аксиома теорије скупова.

2 Ремзијеви бројеви и Ремзијева теорема

Дефиниција 2.1 *Нека је S скуп. За $r \in \mathbb{N}$, обележимо са $[S]^r = \{X \subseteq S \mid |X| = r\}$ скуп свих подскупова S кардиналности r. Нека је $\{A_i\}_{i=0}^{s-1}$ партиција $[S]^r$ у $s > 0$ класа (боја). Кажемо да је скуп $H \subseteq S$ хомоген за ту партицију ако је $[H]^r \subseteq A_i$ за неко i, тј. ако су му сви r-елементни подскупови обојени истом бојом.*

Дефиниција 2.2 *Нека су κ и λ кардинали. Пишемо $\kappa \to (\lambda_0, ..., \lambda_{s-1})^r_s$ ако за сваки скуп S кардиналности κ и сваку партицију $\{A_i\}_{i=0}^{s-1}$ скупа $[S]^r$ постоји неко i и скуп $H \subseteq S$ за који $[H]^r \subseteq A_i$ и $|H| \geq \lambda_i$. У случају да је $\lambda_i = \lambda$ за свако i, пишемо скраћено $\kappa \to (\lambda)^r_s$.*

Претпоставимо да важи $\kappa \to (\lambda)^r_s$. Тада важи и следеће:
1) Ако је $\kappa' \geq \kappa$, тада $\kappa' \to (\lambda)^r_s$;
2) Ако је $\lambda' \leq \lambda$, тада $\kappa \to (\lambda')^r_s$;
3) Ако је $s' \leq s$, тада $\kappa \to (\lambda)^r_{s'}$;
4) Ако је $r' \leq r$, тада $\kappa \to (\lambda)^{r'}_s$.
Слична тврђења важе и када посматрамо $\kappa \to (\lambda_0, ..., \lambda_{s-1})^r_s$. Такође важи и то да није битан редослед у којем се λ_i, $i \in \{0, ..., s-1\}$ налазе, тачније важи да ако је $\kappa \to (\lambda_0, ..., \lambda_{s-1})^r_s$, тада ће за било коју пермутацију $\{\lambda_{\pi(0)}, ..., \lambda_{\pi(s-1)}\}$ важити $\kappa \to (\lambda_{\pi(0)}, ..., \lambda_{\pi(s-1)})^r_s$.

Теорема 2.3 ***Коначна Ремзијева теорема*** *За све позитивне природне бројеве k, r, s постоји $n \in \mathbb{N}$ тако да $n \to (k)^r_s$.*

Доказ. Доказаћемо прво случај $s = 2$, тачније доказаћемо да за све $r, p, q \in \mathbb{N} - \{0\}$ постоји $n \in \mathbb{N}$ за који важи $n \to (p, q)^r_2$ (како је $s = 2$, гледаћемо као да имамо две боје којима бојимо подскупове, плаву и црвену).

Доказ спроводимо индукцијом по r. Случај $r = 1$ је тривијалан; узећемо да је $n = p + q - 1$; уколико нема ни p елемената плаве боје ни q елемената црвене боје, то би значило да је кардиналност скупа $n = p + q - 1 > p + q$, што је контрадикција.
Претпоставимо сада да је тврђење за дато r тачно за све $p, q \in \mathbb{N}$; докажимо да следи да је тачно и за $r + 1$. Означимо најмање n за које важи $n \to (p, q)^r_2$ са $R(p, q; r)$.
За дати скуп S, $|S| = n$ (где нам је n још увек неодређено) узмимо неку

партицију $[S]^{r+1} = A_0 \cup A_1$; уколико је $p \le r$ или $q \le r$ само узмемо неки скуп кардиналности p (тј. q); уколико је $p = q = r+1$, ако је $|A_0| > 0$ узмемо неки елемент из A_0 или уколико је $|A_0| = 0$ узмемо неки елемент из A_1 (не могу и A_0 и A_1 бити празни). Дакле, ПП да је $p > r+1$ и $q > r+1$ као и да је тврђење тачно за све p', q' за које је $p' + q' < p + q$; сада доказ спроводимо индукцијом по $p + q$.
Фиксирајмо неко $a \in S$. Нека је $S^a = S - \{a\}$, и нека је $\{B_0, B_1\}$ партиција од $[S^a]^r$ дефинисана са $X \in B_0$ акко $X \cup \{a\} \in A_0$, аналогно дефинишемо и B_1.
Како је $|S^a| = n - 1$, било би корисно да некако искористимо индуктивну хипотезу и тако конструишемо скуп који нам треба. У циљу тога, узмимо да је $n - 1 = R(p', q'; r)$; тада ћемо имати подскуп $H^a \subseteq S^a$ за који ће важти један од наредна два случаја:
1) $|H^a| \ge p'$ и $[H^a]^r \subseteq B_0$
2) $|H^a| \ge q'$ и $[H^a]^r \subseteq B_1$.
За скуп H ће важити да су му подскупови облика $X \cup \{a\}$, $X \subseteq H^a$ припадати истој класи партиције у $[S]^{r+1}$, те нам остаје да проверимо $(r+1)$-елементне подскупове од H^a.
1) На основу индуктивне хипотезе имамо да постоји $n_1 \in \mathbb{N}$, за које важи $n_1 = R(p-1, q; r+1)$; узмимо да је $p' = n_1$. Тада или постоји $H' \subseteq H^a$, $|H'| \ge p - 1$ и $[H']^{r+1} \subseteq A_0$ или постоји $H'' \subseteq H^a$, $|H''| \ge q$ и $[H'']^{r+1} \subseteq A_1$. У првом случају узмемо да је $H = H' \cup \{a\}$, а у другом случају узмемо да је $H = H''$, и у оба случаја тривијално видимо да задовољавају тражене услове.
2) Слично као и у првом случају, узмемо да је $q' = n_2 \in \mathbb{N}$, за које важи $n_2 = R(p, q-1; r+1)$; даље је аналогно као први случај.
Дакле, ако узмемо да је $n = R(p', q'; r)$ за $p' = R(p-1, q; r)$ и $q' = R(p, q-1; r)$, и тада важи $n \to (p, q)_2^{r+1}$, чиме је доказ готов.

Доказали смо тврђење за $s = 2$; случај $s = 1$ је тривијалан; сада индукцијом по s доказујемо тврђење.
Претпоставимо да за неко $m \in \mathbb{N}$ важи $m \to (k)_s^r$. Посматрајмо неку партицију $\{A_i\}_{i=0}^s$ скупа $[S]^r$, неког скупа S, $|S| = n$ где n још нисмо одредили. Дефинишимо $\{B_0, B_1\}$ на следећи начин: $B_0 = \bigcup_{i=0}^{s-1} A_0$, $B_1 = A_s$. Следи је $\{B_0, B_1\}$ партиција скупа $[S]^r$; узмимо да је $n = R(l, l; r)$ (l требамо тек да одредимо). Тада постоји подскуп $H' \subseteq S$, $|H'| \ge l$ и $[H']^r \subseteq B_0$ или $H'' \subseteq S$, $|H''| \ge l$ и $[H'']^r \subseteq B_1$. Узмимо да је $l = max(m, k)$. У првом случају имаћемо да нам сви елементи из $[H']^r$ подељени у s класа, а како је $|H'| \ge m$ имаћемо на основу индуктивне хипотезе да постоји подскуп $H \subseteq H'$, $|H| \ge k$ и $[H]^r \subseteq A_i$ за неко i, што је и тражено; у другом случају само узмемо да је $H = H''$.
Овиме је коначна Ремзијева теорема доказана. $\square$
Коначна Ремзијева теорема нам само гарантује постојање Ремзијевих бројева, међутим испоставља се да је њихово налажење веома тешко, и да углавном знамо само у ком интервалу се налазе. У датој табели приказане су вредности

Ремзијевих бројева $R(p,q;2)$ за неке мање вредности p,q (или интервали у оквиру којих се налазе).

q \ p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	**1**	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2		**2**	3	4	5	6	7	8	9	10
3			**6**	9	14	18	23	28	36	40–42
4				**18**	25[7]	36–41	49–61	59[13]–84	73–115	92–149
5					**43–48**	58–87	80–143	101–216	133–316	149[13]–442
6						**102–165**	115[13]–298	134[13]–495	183–780	204–1171
7							**205–540**	217–1031	252–1713	292–2826
8								**282–1870**	329–3583	343–6090
9									**565–6588**	581–12677
10										**798–23556**

Сада ћемо доказати пример дат у уводу рада.

Теорема 2.4 $R(3,3;2) = 6$

Доказ. Прво ћемо показати да важи $R(3,3;2) \leq 6$. Посматрајмо граф са 6 темена чије су гране обојене са 2 боје, плавом и црвеном рецимо. Фиксирајмо један његов чвор; грана којих воде их њега има 5, те ће бар 3 бити обојене истом бојом, нека је то БУО црвена. Посматрајмо друге крајеве тих грана; уколико је нека грана одређена тим чворовима црвена, тада бисмо имали црвени троугао одређен почетним теменом и са та 2 чвора, а уколико ниједна грана није црвена све су плаве те бисмо имали троугао плаве боје, чиме смо показали да је $R(3,3;2) \leq 6$. Да бисмо доказали да је $R(3,3;2) = 6$, треба да нађемо контрапример у којем имамо граф са 5 чворова у којем нећемо имати истобојни троугао; ако замислимо чворове графа као темена петоугла, само бисмо обојили странице петоугла у црвено, а дијагонале у плаво, и у њему нема ниједног истобојног троугла. □

Теорема 2.5 $R(3,4;2) = 9$

Доказ. Требамо да докажемо да у графу са 9 чворова чије су гране обојене у плаво или црвено, постоји или плави троугао или квадрат чије су све странице и дијагонале црвене.
Покажимо прво да важи $R(3,4;2) \leq 10$. Фиксирајмо један његов чвор; из њега ће полазити бар 6 црвених грана или бар 4 плаве гране. У првом случају из $R(3,3;2) = 6$ следи да ће тих 6 крајева формирати бар један црвени или бар један плави троугао, па ћемо имати или квадрат са свим страницама и дијагоналама црвене боје или плави троугао, чиме је овај случај завршен. Други случај у ком нам из почетног темена полазе бар 4 плаве гране се доказује слично као и да је $R(3,3;2) \leq 6$.
Докажимо сада да важи $R(3,4;2) \leq 9$ користећи претходни део доказа. Фиксирајмо један његов чвор; из њега полази 8 грана, а у претходном делу доказа

смо видели да је ако су или бар 6 грана црвене или бар 4 гране плаве доказ готов; ППС, тада ће из сваког чвора полазити тачно 5 црвене и 3 плаве гране; тада би укупан број плавих грана у графу износио $\frac{9 \cdot 3}{2} = 13.5$, одакле добијамо контрадикцију са претпоставком, те је доказ готов.
Конструишимо још пример графа са 8 чворова који не задовољава услове: ако замислимо чворове графа као темена осмоугла, обојимо му све странице и све дијагонале које спајају наспрамна темена у плаво, а све остале гране у црвено; овакав граф не испуњава тражене услове, јер немамо плави троугао нити квадрат са свим страницама и дијагоналама црвене боје. $\square$

Теорема 2.6 $R(4, 4; 2) = 18$

Доказ. Докажимо прво да је $R(4, 4; 2) \leq 18$. Фиксирајмо један његов чвор; из њега ће полазити бар 9 грана исте боје, нека је то БУО црвена. Из $R(4, 3; 2) = 9$ следи да ће тих 9 чворова садржати или 4 чвора који одређују квадрат са свим страницама и дијагоналама плаве боје, или црвени троугао, чији чворови са почетним теменом одређују квадрат чије су све странице и дијагонале црвене, што завршава доказ.
Сада ћемо конструисати контрапример за граф са 17 чворова. Нумеришимо чворове графа са $\{0, 1, ..., 16\}$, тј. остаци по mod 17; у црвено ћемо обојити оне гране чији чворови се разликују за неки квадратни остатак по mod 17, тј. између којих је растојање у скупу $\{1, 2, 4, 8\}$ а све остале гране обојимо у црвено. Прво ћемо доказати да не постоји комплетан подграф са 4 чвора чије су све гране црвене. ППС тј. да имамо такав подграф; уколико је један чвор у њему нумерисан са v, тада су остали било која 3 чвора из скупа $\{v \pm 1, v \pm 2, v \pm 4, v \pm 8\}$. Приметимо да како све рачунамо по mod 17, можемо узети да нам је један чвор 0, а остали нека 3 од $\{1, 2, 4, 8\}$ (уколико замислимо граф као правилан седамнаестоугао, ово је као да смо га заротирали и поставили у чвор 0 чвор који је имао најмањи остатак по mod 17); чвор нумерисан са 1 се не може налазити у тој четворци тачака јер са било којим од чворова $\{2, 4, 8\}$ гради грану дужине која не може бити црвена. Следи да су та 4 чвора нумерисана са $\{0, 2, 4, 8\}$, али је тада растојање између чворова 2 и 8 једнако 6, што је контрадикција. Остаје нам да сада докажемо да не постоји комплетан подграф са 4 чвора чије су све гране плаве. У њему ће сва растојања између чворова припадати скупу $\{3, 5, 6, 7\}$, па сличним резоновањем као пре имамо да нам је један чвор нумерисан са 0, а остала 3 су из скупа $\{3, 5, 6, 7\}$. Како у сваком одабиру 3 чвора из тог скупа имамо грану која није плава, добијамо контрадикцију и тиме је доказ завршен. $\square$

Видимо да је већ рачунање $R(4, 4; 2)$ било доста теже него $R(3, 3; 2)$. Као што можемо видети из табеле, вредности Ремзијевих бројева доста расту са повећањем $(p + q)$, па их је самим тиме и теже рачунати, а и у примерима који су доказани су границе које смо задали биле оптималне, што није случај за веће Ремзијеве бројеве, тако да се већ за $R(5,5;2)$ не зна тачна вредност. Занимљива је следећа анегдота: чувени математичар Пал Ердеш, који има значајне резултате и у овој области математике, једном је рекао да ако замислимо да долазе ванземаљци и траже нам да одредимо $R(5,5;2)$ или уништавају планету, онда ће нам требати рад сваког математичара и компијутера да бисмо га израчунали, а уколико траже да одредимо вредност $R(6,6;2)$, онда би требали да учинимо све што можемо да их победимо.

Одређивање Ремзијевих бројева и њихових граница је од великог значаја у области коначне комбинаторике, а сада ћемо Ремзијеву теорему проширити и на бесконачне скупове.

Теорема 2.7 *Бесконачна Ремзијева теорема* $\aleph_0 \to (\aleph_0)^r_s$ *важи за све* $r, s \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Доказ. Доказ спроводимо индукцијом по r. Довољно је да докажемо да теорема важи за било који скуп кардиналности $\aleph_0$, рецимо $\mathbb{N}$, јер ће одатле следити да важи за све, пошто ћемо имати бијекцију између скупа $\mathbb{N}$ и било ког скупа кардиналности $\aleph_0$.

Случај $r = 1$ је тривијалан; уколико је $\{A_i\}_{i=0}^{s-1}$ нека партиција скупа $\mathbb{N}$, бар један A_i мора бити бесконачан, јер бисмо у супротном имали да је скуп $\mathbb{N}$ који је бесконачан коначна унија коначних скупова, што је контрадикција, и онда би тај A_i био тражени подскуп.
Идеја је да користимо то што имамо бесконачан скуп а коначно много боја, па да рекурзивно дефинишемо низ елемената чији ће неки подскуп бити бесконачан и чији ће сви $(r+1)$-елементни подскупови бити истобојни.

Претпоставимо да тврђење важи за r, треба да докажемо да важи и за $r+1$. Нека је $\{A_i\}_{i=0}^{s-1}$ нека партиција скупа $[\mathbb{N}]^{r+1}$. Узмимо неки произвољни елемент $a \in \mathbb{N}$ и неки произвољан бесконачан подскуп $S \subseteq \mathbb{N} - \{a\}$. Дефинишимо партицију $\{B_i\}_{i=0}^{s-1}$ скупа $[S]^r$ на следећи начин: $X \in B_i$ акко $\{a\} \cup X \in A_i$. Из индуктивне хипотезе имамо да постоји бесконачан подскуп $H \subseteq S$, $[H]^r \subseteq B_i$ за неко i; одаберимо једно $i = i(a,S)$ и једно $H = H(a,S)$ (i увек можемо одабрати као најмањи елемент скупа, док за одабир појединачног H користимо аксиому избора).
Конструисаћемо низове $\langle a_n \rangle_{n=0}^{\infty}$, $\langle i_n \rangle_{n=0}^{\infty}$ и $\langle H_n \rangle_{n=0}^{\infty}$ рекурзивно. Узмимо да је $a_0 = 0$, $i_0 = i(0, \mathbb{N} - \{0\})$ и $H_0 = H(0, \mathbb{N} - \{0\})$; даље ћемо рекурзивно конструисати a_{n+1} као најмањи елемент H_n, $i_{n+1} = i(a_{n+1}, H_n - \{a_{n+1}\})$ и $H_{n+1} = H(a_{n+1}, H_n - \{a_{n+1}\})$. Из конструкције видимо да је низ $\langle a_n \rangle_{n=0}^{\infty}$ растући; такође ћемо имати да за сваки $(r+1)$-елементни подскуп облика $\{a_k, a_{k_1}, ..., a_{k_r}\}$, $k_i > k$ за свако i, важи да припада партицији A_{i_k}. Како имамо коначан број боја, а низ $\langle i_n \rangle_{n=0}^{\infty}$ је бесконачан, постојаће нека боја j

која се појављује бесконачно пута; нека је $M = \{n \in \mathbb{N} \mid i_n = j\}$ скуп свих таквих индекса. Тада ће скуп $H = \{a_i \mid i \in M\}$ бити тражени скуп, јер је бесконачан и сваки његов $(r+1)$-елементни подскуп припада A_j. $\square$
Сада ћемо показати неке једноставне примене бесконачне Ремзијеве теореме.

Последица 1 Сваки бесконачан уређен скуп $(P, \leq)$ садржи бесконачан подскуп S у којем су или свака два елемента упоредива или свака два елемента неупоредива.

Доказ. Узмимо партицију $\{A_0, A_1\}$ од $[P]^2$, где је $A_0 = \{\{x,y\} \in [P]^2 \mid x, y$ су упоредиви са $\leq\}$ и $A_1 = \{\{x,y\} \in [P]^2 \mid x, y$ нису упоредиви са $\leq\}$. Тврђење следи из Ремзијеве теореме примењене на $[P]^2$ и партицију $\{A_0, A_1\}$. $\square$

Последица 2 Сваки бесконачан линеарно уређен скуп садржи подскуп изоморфан или са $(\mathbb{N}, <)$ или $(\mathbb{N}, >)$.

Доказ. Нека је $(P, \preceq)$ бесконачан линеарно уређен скуп, и нека је $\leq$ неко добро уређење од P (из аксиоме избора следи да сваки скуп има добро уређење). Узмимо партицију $\{A_0, A_1\}$ од $[P]^2$ где је $A_0 = \{\{x,y\} \in [P]^2 \mid x < y,\ x \prec y\}$ и $A_1 = \{\{x,y\} \in [P]^2 \mid x < y,\ x \succ y\}$. Ремзијева теорема гарантује постојање бесконачног хомогеног скупа H за партицију $\{A_0, A_1\}$. Релација $<$ добро уређује H, па можемо узети почетни сегмент H' од H изоморфан са ω; у случају да је $[H]^2 \subseteq A_0$ имаћемо да је $(H', \prec)$ изоморфан са $(\mathbb{N}, <)$, а у случају $[H]^2 \subseteq A_1$ имаћемо да је $(H', \succ)$ изоморфан са $(\mathbb{N}, >)$. $\square$

Теорема 2.8 ***Болцано-Вајерштрас*** *Сваки бесконачан ограничен низ реалних бројева има конвергентан подниз.*

Доказ. Нека је $S = \langle a_i \mid i \in \mathbb{N}\rangle$ неки низ; дефинишимо партицију $\{A_0, A_1, A_2\}$ скупа $[S]^2$, где за свако $a_i, a_j \in S$, $i < j$ важи $\{a_i, a_j\} \in A_0$ акко $a_i = a_j$, $\{a_i, a_j\} \in A_1$ акко $a_i < a_j$ и $\{a_i, a_j\} \in A_2$ акко $a_i > a_j$ (како је $\mathbb{R}$ линеарно уређен са $\leq$, сваки пар ће припадати тачно једној класи партиције A_i). Ремзијева теорема нам гарантује постојање бесконачног хомогеног подскупа $H \in S$, за који важи једно од $[H]^2 \subseteq A_0$, $[H]^2 \subseteq A_1$ и $[H]^2 \subseteq A_2$. У првом случају имамо бесконачан константан подниз који тривијално конвергира. У другом случају ћемо имати бесконачан растући низ $\langle b_i \mid i \in \mathbb{N}\rangle$; како сваки ограничен скуп у $\mathbb{R}$ има супремум, и овај подниз ће га имати, означимо га са s. Нека је $\epsilon > 0$ дато. Како је $s = \sup(H)$, $s - \epsilon$ није горње ограничење, те постоји неки члан низа $b_n > s - \epsilon$; низ b_i је растући и бесконачан, те ће за све $m \geq n$ важити $b_m > s - \epsilon$, а како је $s + \epsilon > s$ горње ограничење имамо да је $|b_m - s| < \epsilon$, одакле следи да је s лимес овог низа. Трећи случај је сличан као претходни, па је тиме доказ завршен. $\square$

Само ћемо још неформално доказати да се коначна Ремзијева теорема може извести из бесконачне Ремзијеве теореме. Идеја је да уколико за неке $k, r, s \in \mathbb{N} - \{0\}$ не постоји ниједно $n \in \mathbb{N}$ тако да важи $n \to (k)^r_s$, конструишемо бесконачан подскуп скупа $\mathbb{N}$ који неће имати хомоген подскуп за неку партицију, што би била контрадикција са бесконачном Ремзијевом теоремом. За свако $n \in \mathbb{N}$ дефинишимо C_n као скуп свих партиција скупа $[n]^r$ за које не постоји хомоген подскуп кардиналности k, при чему је сваки C_n коначан и непразан. Посматрајмо сада $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$ (скуп свих партиција које су проблематичне, свих кардиналности); можемо га уредити са $\subset$, тако да то уређење буде стабло (стабла су као генерализација добрих уређења, у којима имамо неки елемент за корен и даље се остали гранају) у којем ћемо на једнакој удаљености од чвора имати партиције скупова истих кардиналности. Како је сваки C_n коначан, имаћемо неку бесконачну грану; ако узмемо унију елемената свих партиција са те гране, добићемо партицију скупа $\mathbb{N}$ за коју не постоји хомоген подскуп од $\mathbb{N}$ кардиналности k, што је контрадикција са бесконачном Ремзијевом теоремом.

3 Ремзијева теорема и непребројиви кардинали

Након што смо доказали да важи $\aleph_0 \to (\aleph_0)^r_s$, поставља се питање важе ли аналогна тврђења за скупове веће кардиналности од $\aleph_0$, рецимо $\aleph_1 \to (\aleph_1)^r_s$. Наредна теорема нам даје одговор.

Теорема 3.1 ***Негативна релација Сиерпинског*** $2^{\aleph_0} \nrightarrow (\aleph_1)^2_2$

Доказ. Довољно је да докажемо да тврђење важи за скуп $\mathbb{R}$, јер је $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$. Означимо $2^{\aleph_0} = \lambda$; скуп $\mathbb{R}$ је линеарно уређен са $\leq$; нека је $\preceq$ добро уређење $\mathbb{R}$ изоморфно са λ.
Нека је $\{A_0, A_1\}$ партиција скупа $[\mathbb{R}]^2$ дефинисана са $A_0 = \{\{x, y\} \in [\mathbb{R}]^2 \mid x \prec y,\ x < y\}$ и $A_1 = \{\{x, y\} \in [\mathbb{R}]^2 \mid x \succ y,\ x < y\}$. Уколико важи $2^{\aleph_0} \to (\aleph_1)^2_2$ имаћемо да постоји подскуп $H \subseteq \mathbb{R}$, $|H| \geq \aleph_1$, за који важи $[H]^2 \subseteq A_0$ или $[H]^2 \subseteq A_1$. У првом случају ћемо имати да је $(H, \prec)$ добро уређен, те ће постојати ординал μ са којим је изоморфан; нека је $\varphi : \mu \to H$ тај изоморфизам. Како је φ изоморфизам, за све ординале $\xi < \eta < \mu$ важиће $\varphi(\xi) \prec \varphi(\eta)$, одакле следи $\varphi(\xi) < \varphi(\eta)$ (јер је $[H]^2 \subseteq A_0$). Дакле, $\{(\varphi(\xi), \varphi(\xi + 1) \mid \xi < \mu\}$ ће бити непребројив скуп дисјунктних отворених интервала у $\mathbb{R}$, што је контрадикција (како је $\mathbb{Q}$ густ у $\mathbb{R}$, сваки од тих отворених интервала би садрзао елемент из $\mathbb{Q}$, па имали бисмо 1-1 пресликавање из непребројивог скупа дисјунктних отворених интервала у $\mathbb{Q}$). У другом случају на сличан начин долазимо до контрадикције. $\square$

Као што смо видели из претходне теореме, немамо неку општу генерализацију Ремзијеве теореме, међутим постоје резултати који су генерализације посебних случајева.

Теорема 3.2 ***Ердеш-Милер-Душник*** $\aleph_1 \to (\aleph_1, \aleph_0)^2_2$

Доказ. Довољно је да докажемо да тврђене важи за скуп ω_1, јер је $|\omega_1| = \aleph_1$. Нека је $\{A, B\}$ партиција скупа $[\omega_1]^2$. За неки ординал $\alpha \in \omega_1$ дефинишимо $B(\alpha) = \{\beta \in \omega_1 \mid \beta \neq \alpha,\ \{\alpha, \beta\} \in B\}$ ($B(\alpha)$ нам је скуп свих ординала који су допуна за α до неког елемента партиције B). Сада ћемо да разликујемо 2 случаја:
1) За сваки непребројив подскуп $X \subseteq \omega_1$ постоји $\alpha \in X$ за који важи $|X \cap B(\alpha)| \geq \aleph_1$. Конструисаћемо пребројив хомоген подскуп скупа ω_1 за B

рекурзивно. Узмимо да је $H_0 = \omega_1$; користећи претпоставку, постојаће неко најмање $\alpha_0 \in H_0$, $|H_0 \cap B(\alpha_0)| \geq \aleph_1$; даље ћемо дефинисати $H_{i+1} = H_i \cap B(\alpha_i)$, за који ће важити $|H_{i+1}| \geq \aleph_1$, те ће постојати неко најмање $\alpha_{i+1} \in H_{i+1}$, $|H_{i+1} \cap B(\alpha_{i+1})| \geq \aleph_1$. За овако дефинисан пребројив низ $\langle \alpha_n \rangle_{n=0}^{\infty}$ ће за свако $n, m \in \mathbb{N}$, $n < m$ важити да $\{\alpha_n, \alpha_m\} \in B$, те имамо скуп $H = \{\alpha_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $|H| = \aleph_0$ за који важи $[H]^2 \subseteq B$, чиме је овај случај готов.
2) Постоји непребројив подскуп $X \subseteq \omega_1$ у којем за сваки $\alpha \in X$ важи $|X \cap B(\alpha)| \leq \aleph_0$. Конструисаћемо непребројив хомоген подскуп скупа ω_1 за A трансфинитном индукцијом дужине ω_1. Уколико имамо дефинисан низ $\langle \alpha_\nu \mid \nu < \lambda \rangle$, $\alpha_\nu \in X$ са све $\nu < \lambda < \omega_1$, важиће да је скуп $\bigcup_{\nu<\lambda} X \cap B(\alpha_\nu)$ највише пребројив, јер представља унију пребројиво много највише пребројивих скупова (како је ω_1 почетни ординал и $\lambda < \omega_1$ следи да је $|\lambda| \leq \aleph_0$). Следи да је скуп $X - \bigcup_{\nu<\lambda} X \cap B(\alpha_\nu)$ непребројив, те ћемо узети да је α_λ његов најмањи елемент; за овако конструисан низ $\langle \alpha_\nu \mid \nu < \omega_1 \rangle$ важиће $\alpha_\nu \neq \alpha_\lambda$ и $\{\alpha_\nu, \alpha_\lambda\} \in A$ за све $\nu < \lambda < \omega_1$, те имамо скуп $H = \{\alpha_\nu \mid \nu < \omega_1\}$, $|H| = \aleph_1$ за који важи $[H]^2 \subseteq A$, чиме је доказ завршен. $\square$
Ово тврђење важи и уколико $\aleph_1$ заменимо било којим бесконачним кардиналом κ, тј. за сваки бесконачан кардинал κ важи $\kappa \to (\kappa, \aleph_0)^2_2$, међутим доказ ћемо изоставити, јер бисмо морали да уводимо појам регуларног и сингуларног кардинала, кофиналности.

Теорема 3.3 ***Ердеш-Радо*** $(2^{\aleph_0})^+ \to (\aleph_1)^2_{\aleph_0}$

Доказ. Означимо $(2^{\aleph_0})^+ = \lambda$. Нека је $\{A_n\}_{n \in N}$ партиција скупа $[\lambda]^2$. Дефинишимо $n(\alpha, \beta)$ за све $\{\alpha, \beta\} \in [\lambda]^2$ као индекс партиције којој тај скуп припада.
За свако $\alpha < \lambda$ конструишаћемо трансфинитни низ f_α на следећи начин: $f_\alpha(0) = 0$, и уколико је $\langle f_\alpha(\mu) \mid \mu < \xi \rangle$ дефинисано за $\xi < \alpha$, ако постоји неки ординал $\nu < \alpha$, $\nu \neq f_\alpha(\mu)$ тако да је $n(f_\alpha(\mu), \nu) = n(f_\alpha(\mu), \alpha)$ за све $\mu < \xi$ ставићемо да је $f_\alpha(\xi)$ најмањи такав ординал, а ако не постоји прекидамо процес. Приметимо да из конструкције следи да је f_α растући низ ординала и да му је домен неки почетни сегмент од α. Када бисмо показали да је неки f_α непребројив, вероватно бисмо могли да истористимо то и да је број класа партиције пребројив.
ППС, тј. да за сваки ординал $\alpha < \lambda$ важи $|dom(f_\alpha)| \leq \aleph_0$. За свако $\alpha < \lambda$ дефинишимо низ $g_\alpha : dom(f_\alpha) \to \mathbb{N}$, $g_\alpha(\mu) = n(f_\alpha(\mu), \alpha)$. Приметимо да ако важи $g_\alpha = g_\beta$, тада следи и да је $f_\alpha = f_\beta$, јер важи $dom(f_\alpha) = dom(g_\alpha) = dom(g_\beta) = dom(f_\beta)$ и уколико је $f_\alpha(\mu) = f_\beta(\mu)$ за свако $\mu < \xi$, тада је $n(f_\alpha(\mu), \nu) = n(f_\alpha(\mu), \alpha) = g_\alpha(\mu)$ акко $n(f_\beta(\mu), \nu) = n(f_\beta(\mu), \beta) = g_\beta(\mu)$ одакле следи и да је $f_\alpha(\xi) = f_\beta(\xi)$, те је $f_\alpha = f_\beta$. Низова g_α има највише $\aleph_1 \cdot (\aleph_0^{\aleph_0}) = \aleph_1 \cdot (2^{\aleph_0}) = 2^{\aleph_0}$ ($\aleph_1$ је број различитих ординала кардиналности не веће од $\aleph_0$, док је $(\aleph_0)^{\aleph_0}$ број могућих пресликавања сваког од њих у $\mathbb{N}$), а како је

$\lambda = (2^{\aleph_0})^+$ следи да ће постојати нека два ординала α, β за које важи $g_\alpha = g_\beta$, а из претходног закључујемо и да је $f_\alpha = f_\beta$. Тада за све $\mu \in dom(f_\alpha)$ важи $n(f_\alpha(\mu), \beta) = n(f_\beta(\mu), \beta) = g_\beta(\mu) = g_\alpha(\mu) = n(f_\alpha(\mu), \alpha)$, те следи да можемо да ставимо β као наредни члан низа f_α, што је контрадикција.
Дакле закључили смо да постоји неко f_α за које је $|dom(f_\alpha)| \geq \aleph_1$. Из конструкције низа f_α следи да ће ако фиксирамо неки члан γ, сви чланови низа после њега у пару са њим припадаће истој класи партиције $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, тј. ако узмемо чланове низа $\gamma_1, \gamma_2 > \gamma$ важити $n(\gamma, \gamma_1) = n(\gamma, \gamma_2) = n(\gamma, \alpha)$, те можемо поделити чланоте низа f_α у партицију $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ где је $B_n = \{\gamma \in f_\alpha \mid \{\gamma, \delta\} \in A_n$ за неки $\delta \in f_\alpha, \gamma < \delta\}$ за све $n \in N$. Како је $|dom(f_\alpha)| \geq \aleph_1$ а пребројиво много класа партиција, следи да ће за неко $n \in \mathbb{N}$ важити $|B_n| \geq \aleph_1$, а како је и $[B_n]^2 \subseteq A_n$, те ће нам $H = B_n$ бити тражени скуп, чиме је доказ готов. $\square$
Као што је био случај и са претходном теоремом, важи следећа генерализација тврђења: $(2^\kappa)^+ \to (\kappa+1)^2_k$ за сваки бесконачан ординал κ.

4 Закључак

У овом раду упознали смо се са неким основним елементима комбинаторне теорије скупова.

У првом делу рада видели смо шта су ординали и кардинали и показали нека њихова својства.

У другом делу рада доказали смо Ремзијеву теорему и за коначне и за бесконачне скупове и израчунали неке вредности малих Ремзијевих бројева. Израчунавање и одређивање граница Ремзијевих бројева је од великог значаја у комбинаторици, и има доста резултата у тој области.

У трећем делу рада смо "проширили" Ремзијеву теорему на непребројиве скупове, при чему је ту било простора за још ствари. Књига [2] садржи доста резултата на ову тему.

Захвалио бих се менторима Бориши Кузељевићу и Предрагу Тановићу на уложеном времену и пренетом знању, при чему бих се посебно захвалио професору Тановићу који ме је и упознао са овом области. Такође бих се захвалио и професору Драгољубу Кечкићу на пренетом знању из математике у протекле две године.

Литература

[1] Karel Hrbacek, Thomas Jech, *Introduction to Set Theory, Third Edition, Revised and Expanded (Pure and Applied Mathematics)*, CRC Press (1999).

[2] Paul Erdős, András Hajnal, Attila Máté, Richard Rado, *Combinatorial Set Theory: Partition Relations for Cardinals*, North-Holland (1984).

[3] Зоран Петровић, Жарко Мијајловић, *Математичка логика: елементи теорије скупова*, Завод за уџбенике (2012).